

A DISTRIBUIÇÃO EXATA DO CRITÉRIO DE
BARTLETT PARA TESTAR A IGUALDADE DE
MATRIZES DE COVARIÂNCIA

NELSON FERNANDES DE OLIVEIRA

Orientador:

Prof. Dr. Pushpa Narayan Rathie

Dissertação apresentada no Instituto
de Matemática, Estatística e Ciência
da Computação, como requisito par-
cial para obtenção do título de Mes-
tre em Estatística.

Junho/1982

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

RESUMO

O objetivo deste trabalho é a determinação da distribuição exata do Critério sugerido por Bartlett (1937), para testar a hipótese de igualdade de matrizes de covariância em populações normais multivariadas independentes.

Para isto, parte-se dos momentos do critério e através da utilização da Transformada de Mellin com o auxílio do Teorema dos Resíduos chega-se a função densidade do critério e daí a sua distribuição acumulada. Os resultados são apresentados em termos de funções especiais (a função H e a função G-de Meijer) e em forma computável, para o caso em que o número de variáveis é maior ou igual que o número de populações.

AGRADECIMENTOS

O Autor agradece especialmente ao Prof. Dr. Pushpa N. Rathie, pela segura orientação durante a elaboração deste trabalho. Agradece também o apoio dos Professores do Departamento de Estatística do IMECC-UNICAMP, particularmente à Profª Drª Lilian T. Sheng. Agradece ainda, pelo apoio, aos Colegas do Departamento de Estatística do Instituto de Matemática da UFBa.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO.....	5
CAPÍTULO I - A DENSIDADE DO CRITÉRIO DE BARTLETT EM TERMOS DE FUNÇÕES ESPECIAIS	
1.1 Introdução.....	7
1.2 O Critério de Bartlett para Testar a Igualdade de Matrizes de Covariância.....	7
1.3 As Funções Especiais H e G-de Meijer.....	9
1.4 A Densidade de V em Termos das Funções H e G-de Meijer....	10
1.5 A Densidade de V em Casos Especiais.....	13
CAPÍTULO II - A DISTRIBUIÇÃO DO CRITÉRIO DE BARTLETT EM FORMA COMPUTÁVEL	
2.1 Introdução.....	15
2.2 Definição do Problema.....	15
2.3 A Densidade de V no Caso $q \leq p \leq 2q$, q Par, p Par.....	18
2.4 A Função Distribuição Acumulada de V para $q \leq p \leq 2p$, p Par, q Par.....	29
2.5 A Densidade e Distribuição de V no Caso p Ímpar, q Ímpar..	30
2.6 A Densidade e Distribuição de V no Caso p Par, q Ímpar....	38
2.7 A Densidade e Distribuição de V no Caso p Ímpar, q Par....	41
BIBLIOGRAFIA.....	45

INTRODUÇÃO

Para testar a hipótese de igualdade das matrizes de co variância em q populações normais p -variadas independentes, Bartlett (1937) sugeriu um critério, que é uma modificação do critério da razão de verossimilhança de Wilks.

Anderson (1958, Cap. 10), apresenta detalhadamente o teste e os critérios de Wilks e Bartlett, bem como os momentos do critério de Bartlett. A partir dos momentos ele apresenta a distribuição exata do critério para os casos em que há apenas duas populações ($q=2$) e uma ou duas ($p=1$ ou $p=2$) variáveis. Para os demais casos ele dá a distribuição assintótica do critério baseado numa teoria geral para a distribuição assintótica do critério da razão de verossimilhança (Box, 1939).

Aqui, neste trabalho, será apresentada a distribuição exata do critério de Bartlett, quando a hipótese é verdadeira. Para isto será utilizada a transformada de Mellin.

A transformada de Mellin tem sido bastante usada na determinação de distribuições exatas na Estatística, desde que Nair (1938) a utilizou para obter a função densidade de uma variável aleatória através de sua sequência de momentos.

A transformada de Mellin tem sido usada na determinação da distribuição exata de produtos de variáveis aleatórias independentes (Epstein (1948), Springer e Thompson (1966), Lomnicki (1967), Rathie e Pederzoli (1980) e outros).

Particularmente, na determinação de distribuição exata de critérios de testes de razão de verossimilhança a transformada de Mellin tem sido de grande importância. Mathai (1970, 1971), Mathai e Rathie (1970, 1971a, 1971b), Jain, Rathie e Shah (1975), a utilizam na determinação da distribuição exata de critérios de vários testes.

Recentemente, com o auxílio de programas de computador, foram calculados os pontos percentuais a partir da distribui

ção exata de produto de variáveis aleatórias independentes (Rathie e Rohrer, 1980) e de critérios de testes da razão de verossimilhança (Katyiar e Mathai, (1979a, 1979b, 1980).

A distribuição exata do critério de Bartlett será apresentada inicialmente em termos das funções especiais Função H e Função G-de Meijer (Capítulo 1), onde são discutidos dois casos especiais e em seguida (Capítulo 2), é apresentada a distribuição exata numa forma computável, a partir da qual podem ser calculados os pontos percentuais através da função distribuição acumulada. Por conveniência do método e para simplificação computacional os resultados serão apresentados para tamanhos de amostras iguais e subdivididos em 4 casos: 1) p par, q par; 2) p ímpar, q ímpar ; 3) p par, q ímpar e 4) p ímpar, q par. Será discutido o caso em que o número de variáveis é maior ou igual que o número de populações, $p \geq q$. O caso, mais simples, em que $p \leq q$ foi estudado por Mathai (1971).

CAPÍTULO I

A DENSIDADE DO CRITÉRIO DE BARTLETT EM TERMOS DE FUNÇÕES ESPECIAIS

1.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, é apresentado o critério de Bartlett para testar a hipótese de igualdade de matrizes de covariância. A partir dos momentos do critério e usando-se a transformada inversa de Mellin, encontra-se a função densidade do critério, que é apresentada em termos das funções especiais G-de Meijer e H. Alguns casos especiais são dados em termos de funções especiais elementares.

1.2 - O CRITÉRIO DE BARTLETT PARA TESTAR A IGUALDADE DE MATRIZES DE COVARIÂNCIA

Sejam q populações normais p -variadas independentes com matrizes de covariância $\Sigma_1, \dots, \Sigma_q$. Extrai-se uma amostra de cada população. Seja $x_{\alpha}^{(g)}$ ($\alpha=1, \dots, N_g$; $g=1, \dots, q$) uma observação da g -ésima população $N(\mu^{(g)}, \Sigma_g)$.

Para testar a hipótese

$$(1.2.1) \quad H: \Sigma_1 = \Sigma_2 = \dots = \Sigma_q,$$

o critério da razão de verossimilhança dado por Wilks (1932) é

$$(1.2.2) \quad \lambda = \frac{\prod_{g=1}^q |A_g|^{(1/2)N_g}}{|A|^{(1/2)N}} \frac{N^{(1/2)pN}}{\prod_{g=1}^q N_g^{(1/2)pN_g}}$$

onde,

$$A_g = \sum_{\alpha=1}^{N_g} (x_{\alpha}^{(g)} - \bar{x}^{(g)}) (x_{\alpha}^{(g)} - \bar{x}^{(g)})', \quad g=1, \dots, q$$

$$A = \sum_{g=1}^q A_g, \quad \bar{x}^{(g)} = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} x_i^{(g)}$$

$$x_i^{(g)} = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{pi} \end{pmatrix} \quad \text{para a } g\text{-ésima amostra}$$

x_{ji} é uma observação da j -ésima variável no i -ésimo elemento da g -ésima amostra.

$N_g, g=1, \dots, q$ são os tamanhos das amostras e

$$N = \sum_{g=1}^q N_g.$$

Bartlett (1937), propôs um critério, que é uma modificação do critério de Wilks e é dado por

$$(1.2.3) \quad V = \frac{\prod_{g=1}^q |A_g|^{(1/2)n_g}}{|A|^{(1/2)n}}, \quad 0 \leq V \leq 1$$

onde

$$n_g = N_g - 1 \quad \text{e} \quad n = \sum_{g=1}^q n_g = N - q.$$

O h -ésimo momento de V , quando H é verdadeira, foi achado por Wilks (1932) e é dado por (ver Anderson (1958), pg 253):

$$(1.2.4) \quad E(V^h) = \prod_{i=1}^p \left\{ \prod_{g=1}^q \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n_g + h \cdot n_g + 1 - i)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(n_g + 1 - i)]} \right\} \cdot \frac{\Gamma[\frac{1}{2}(n + 1 - i)]}{\Gamma[\frac{1}{2}(n + hn + 1 - i)]}$$

Como $0 \leq V \leq 1$, os momentos determinam unicamente a distribuição.

1.3 - AS FUNÇÕES ESPECIAIS H E G-DE MEIJER

A Função H foi introduzida por Fox (1961) e é definida na forma de uma integral do tipo Mellin-Barnes, como (ver, por exemplo, Mathai e Saxena (1978))

$$(1.3.1) \quad H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_1, \alpha_1), \dots, (a_p, \alpha_p) \\ (b_1, \beta_1), \dots, (b_q, \beta_q) \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - \alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + \alpha_j s)} z^{-s} ds$$

onde,

$i = \sqrt{-1}$; p, q, m, n são inteiros tais que $1 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$;

α_j ($j=1, \dots, p$), β_j ($j=1, \dots, q$) são positivos; e

a_j ($j=1, \dots, p$), b_j ($j=1, \dots, q$) são complexos tais que

$\alpha_j(b_n + v) \neq \beta_h(a_j - 1 - \lambda)$, para $v, \lambda = 0, 1, \dots$; $h=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$.

L é um contorno separando os pontos

$-s = (b_j + v)/\beta_j$ $j=1, \dots, m$; $v=0, 1, \dots$

e

$-s = (a_j - 1 - v)/\alpha_j$, $j=1, \dots, n$; $v=0, 1, \dots$.

Para um estudo detalhado das condições de existência, expansões assintóticas e continuacões analíticas, ver Braaksma (1964).

A função G-de Meijer, na forma de uma integral do tipo Mellin-Barnes foi definida por Meijer (1941, 1946) e é dada por (Erdelyi e outros (1953) pg. 206-208, Luke (1969), pg. 143)

$$(1.3.2) \quad G_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j + s)} z^{-s} ds$$

onde o produto vazio é igual a 1, $0 < m \leq q$, $0 < n \leq p$ e os parâmetros são tais que nenhum polo de $\Gamma(b_j + s)$, $j=1, \dots, m$, coincide com qualquer polo de $\Gamma(1-a_k - s)$, $k=1, \dots, n$.

Há três contornos L de integração:

a) L vai de $-i\infty$ a $+i\infty$ de tal modo que todos os polos de $\Gamma(b_j + s)$, $j=1, \dots, m$, fiquem a direita e todos os polos de $\Gamma(1-a_k - s)$, $k=1, \dots, n$ à esquerda, de L . A integral converge se $p+q < 2(m+n)$ e $|\arg x| < (m+n - (1/2)p - (1/2)q)\pi$. Se $|\arg x| = (m+n - (1/2)p - (1/2)q)\pi$, a integral converge absolutamente quando $p=q$ se $\operatorname{Re}(v) < -1$; e quando $p \neq q$, se com $s = \sigma + i\tau$, σ e τ reais, σ é escolhido de tal modo que para $\tau \rightarrow \pm\infty$, $(q-p)\sigma > \operatorname{Re}(v) + 1 + (1/2)p - (1/2)q$, onde $v = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{k=1}^p a_k$.

b) L é um ciclo começando e terminando em $+\infty$, no sentido anti-horário, englobando todos os polos de $\Gamma(b_j + s)$, $j=1, \dots, m$, mas nenhum dos polos de $\Gamma(1-a_k - s)$, $k=1, \dots, n$. A integral converge se $q > 1$ e, ou $p < q$ ou $p=q$ e $|z| < 1$.

c) L é um ciclo começando e terminando em $-\infty$, no sentido horário, englobando todos os polos de $\Gamma(1-a_k - s)$, $k=1, \dots, n$, porém nenhum de $\Gamma(b_j + s)$, $j=1, \dots, m$. A integral converge se $p \geq 1$ e, ou $p > q$ ou $p=q$ e $|z| > 1$.

A função G -de Meijer é um caso especial da Função H , quando α_i , $i=1, \dots, p$ e β_j , $j=1, \dots, q$ são racionais.

1.4 - A DENSIDADE DE V , EM TERMOS DAS FUNÇÕES H E G -DE MEIJER

Por uma questão de simplicidade de cálculos, principalmente na expressão da densidade de V em forma computável, será considerado, neste trabalho, o caso em que

$$(1.4.1) \quad n_1 = n_2 = \dots = n_q = n'$$

Neste caso, $\sum_{g=1}^q n_g = n'q = n$, e de (1.2.4)

$$(1.4.2) \quad E(V^h) = \prod_{i=1}^p \left\{ \frac{r^q[(1/2)(n'+hn'+1-i)]}{r^q[(1/2)(n'+1-i)]} \cdot \frac{\Gamma[(1/2)(n'q+1-i)]}{\Gamma[(1/2)(n'q+hn'q+1-i)]} \right\}$$

Esta expressão pode ser reescrita como

$$(1.4.3) \quad E(V^h) = C_{p,q} \prod_{i=1}^p \left\{ \frac{r^q[(1/2)(n'+hn'+1-i)]}{\Gamma[(1/2)(n'q+hn'q+1-i)]} \right\}$$

onde

$$(1.4.4) \quad C_{p,q} = \prod_{i=1}^p \left\{ \frac{\Gamma[(1/2)(n'q+1-i)]}{r^q[(1/2)(n'+1-i)]} \right\}$$

Para determinar a densidade de V , será usada a transformada inversa de Mellin cuja definição é

$$(1.4.5) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L E(z^{h-1}) z^{-h} dh.$$

onde L é um contorno apropriado e $i=\sqrt{-1}$.

Cordeiro (1980), apresenta uma descrição detalhada sobre a transformada e a transformada inversa de Mellin com os resultados e propriedades que as tornam úteis em aplicações na Estatística. Ele também demonstra que existe uma relação um-a-um entre a transformada e a distribuição de probabilidade que a define.

Aplicando a transformada inversa de Mellin ao h -ésimo momento de V dado por (1.4.3), obtém-se

$$(1.4.6) \quad f(v) = C_{p,q} \frac{1}{2\pi i} \int_L \prod_{i=1}^p \left\{ \frac{r^q[(1/2)(n'+hn'+1-i)]}{\Gamma[(1/2)(n'+hn'+1-i)]} \right\} v^{-h-1} dh, \quad 0 < v < 1$$

Fazendo a mudança de variável $s = (1/2)(n'+hn'+1)$,

$$(1.4.7) \quad f(v) = C'_{p,q} \frac{1}{2\pi i} \cdot v^{\frac{1}{n'}} \int_L \prod_{i=1}^p \left\{ \frac{\Gamma(s - (i/2))}{\Gamma[q(s + \frac{1-i-q}{2q})]} \right\} v^{-\frac{2}{n'}s} ds, \quad 0 < v < 1$$

onde,

$$(1.4.8) \quad C'_{p,q} = \frac{2}{n^r} C_{p,q}.$$

Tendo em vista a definição (1.3.1)

$$(1.4.9) \quad f(v) = C'_{p,q} v^{\frac{1}{n^r}} H_{p,pq}^{pq,0} \left[\frac{1}{v^{\frac{1}{n^r}}} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(1-q-i), q; \quad i=1, \dots, p \\ -\frac{i}{2}, 1; \quad i=1, \dots, p \\ \text{repetido } q \text{ vezes} \end{array} \right] \right], \quad 0 \leq v \leq 1$$

que é a expressão da densidade de V em termos da Função H. Aplicando em (1.4.7) a fórmula de Gauss-Legendre de multiplicação de funções gama dada por (ver, por exemplo, Luke (1969))

$$(1.4.10) \quad \Gamma(mz) = (2\pi)^{\frac{1-m}{2}} m^{mz-(1/2)} \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(z + (j/m)), \quad m=2, 3, \dots$$

obtém-se,

$$(1.4.11) \quad f(v) = C''_{p,q} v^{\frac{1}{n^r}} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma^q(s - \frac{i}{2})}{\prod_{i=1}^p \prod_{j=0}^{q-1} \Gamma(s - \frac{1}{2} + \frac{2j-i+1}{2q})} (v^{\frac{2}{n^r}} q^{pq})^{-s} ds, \quad 0 \leq v \leq 1$$

onde

$$(1.4.12) \quad C''_{p,q} = \frac{C'_{p,q}}{\prod_{i=1}^p \left[(2\pi)^{\frac{1-q}{2}} q^{\frac{-q-i}{2}} \right]}$$

Tendo em vista a definição (1.3.2), a densidade de V em termos da função G-de Meijer fica como:

$$(1.4.13) \quad f(v) = C''_{p,q} v^{\frac{1}{n^r}} G_{pq,pq}^{pq,0} \left[q^{pq} v^{\frac{1}{n^r}} \left[\begin{array}{l} \frac{2j-i+1}{2q} - \frac{1}{2}, \quad i=1, \dots, p; \quad j=0, \dots, q-1 \\ -(i/2), \quad i=1, \dots, p, \text{repetido } q \text{ vezes} \end{array} \right] \right], \quad 0 \leq v \leq 1$$

1.5 - A DENSIDADE DE V EM CASOS ESPECIAIS

Para alguns valores de p e q a função G-de Meijer pode ser escrita em termos de funções especiais elementares. Aqui, para p=1, q=2 e para p=2 e q=2 são apresentados dois destes casos.

Para p=1, q=2

$$f(v) = C_{1,2}'' v^{\frac{1}{n'}} G_{2,2}^{2,0} \left[4v^{\frac{2}{n'}} \middle| \begin{matrix} -(1/2), 0 \\ -(1/2), -(1/2) \end{matrix} \right], \quad 0 \leq v \leq 1$$

Mas, (Mathai e Saxena (1978), pg. 74):

$$(1.5.1) \quad G_{2,2}^{2,0} \left[z \middle| \begin{matrix} \alpha_1 + \beta_1 - 1, \alpha_2 + \beta_2 - 1 \\ \alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1 \end{matrix} \right] = \frac{z^{\alpha_2 - 1} (1-z)^{\beta_1 + \beta_2 - 1}}{\Gamma(\beta_1 + \beta_2)} \cdot {}_2F_1(\alpha_2 + \beta_2 - \alpha_1, \beta_1; \beta_1 + \beta_2; 1-z)$$

onde ${}_2F_1(\dots; \dots)$ é a função hipergeométrica de Gauss. Usando este resultado, após simplificação, obtém-se

$$(1.5.2) \quad f(v) = \frac{2^{n'+1} \Gamma(\frac{n'+1}{2})}{\sqrt{\pi} n' \Gamma(\frac{n'}{2})} (1-4v)^{\frac{2}{n'} - \frac{1}{2}} \quad 0 \leq 4v^{\frac{2}{n'}} \leq 1$$

Para p=2, q=2

$$f(v) = C_{2,2}'' v^{\frac{1}{n'}} G_{4,4}^{4,0} \left[16v^{\frac{2}{n'}} \middle| \begin{matrix} -\frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, -1 \end{matrix} \right], \quad 0 \leq v \leq 1$$

Usando o resultado (Erdélyi (1954), pg. 209):

$$(1.5.3) \quad G_{p,q}^{m,n} \left[z \middle| \begin{matrix} a_r \\ b_s \end{matrix} \right] = (2\pi)^{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q - m - n} \cdot {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q + 1 - a_1 - \dots - a_p, b_1 + \dots + b_q \right) \cdot G_{2p,2q}^{2m,2n} \left[2^{2p-2q} z^2 \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}a_r, \frac{1}{2}a_r + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}b_s, \frac{1}{2}b_s + \frac{1}{2} \end{matrix} \right]$$

Obtém-se,

$$f(v) = C_{2,2}'' v^{\frac{1}{n'}} 2^{\frac{1}{2}} G_{2,2}^{2,0} \left[\begin{matrix} \frac{1}{4v^{\frac{1}{n'}}} \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{matrix} \right] \begin{matrix} -1, -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad , \quad 0 \leq v \leq 1$$

Usando o resultado (1.5.1) e simplificando

$$(1.5.4) \quad f(v) = 2^{n'+1} \frac{\left(\frac{n'-1}{n'}\right) \frac{\Gamma(n' - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n'}{2}) \Gamma(\frac{n'}{2} - \frac{1}{2})}}{\Gamma(\frac{n'}{2}) \Gamma(\frac{n'}{2} - \frac{1}{2})} \cdot v^{-\frac{1}{n'}} \left(1 - 4v^{\frac{1}{n'}}\right)^{\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{n'}{2}, 1; \frac{3}{2}; 1 - 4v^{\frac{1}{n'}}\right) ,$$

$$0 \leq 4v^{\frac{1}{n'}} \leq 1 .$$

CAPÍTULO II

A DISTRIBUIÇÃO DO CRITÉRIO DE BARTLETT EM FORMA COMPUTÁVEL

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentada a distribuição exata do critério de Bartlett numa forma computável. Isto será feito para os 4 casos possíveis: a) p par, q par; b) p ímpar, q ímpar; c) p par, q ímpar e d) p ímpar, q par, pois em cada caso, os polos e as ordens dos polos do integrando em (1.4.11) são diferentes. Será usado o teorema dos resíduos para o cálculo de integral complexa de (1.4.11). Para todos os casos será considerado $p \geq q$. O caso mais simples $p < q$ foi estudado por Mathai (1971).

2.2 - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A função densidade de V, como aparece em (1.4.13), não se presta a cálculos dos pontos percentuais de sua função distribuição. Para colocar a densidade de V numa forma computável, será usado o teorema dos resíduos no cálculo da integral

$$(2.2.1) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(v^{\frac{2}{n}} q^{pq} \right)^{-s} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(s - \frac{i}{2})}{\prod_{i=1}^p \prod_{j=0}^{q-1} \Gamma(s - \frac{1}{2} + \frac{2j-i+1}{2q})} ds.$$

Pelo teorema dos resíduos (Ahlfors (1966), pg. 149)

$$(2.2.2) \quad I = \sum_{i=1}^{\infty} \text{Res}_{s=a_i} \left[\left(v^{\frac{2}{n}} q^{pq} \right)^{-s} \frac{\prod_{i=1}^q \Gamma(s - \frac{i}{2})}{\prod_{i=1}^p \prod_{j=0}^{q-1} \Gamma(s - \frac{1}{2} + \frac{2j-i+1}{2q})} \right]$$

Onde, $\text{Res}_{s=a_i}(f(s))$ é o resíduo de $f(s)$ no polo $s=a_i$. Se o polo a_i tem ordem n_i o resíduo de $f(s)$ é dado por

$$(2.2.3) \quad \text{Res}_{s=a_i}(f(s)) = \frac{1}{(n_i-1)!} \lim_{s \rightarrow a_i} \frac{\partial^{n_i-1}}{\partial s^{n_i-1}} (s-a_i)^{n_i} f(s)$$

Com o propósito de identificar os polos e suas ordens, do integrando em (2.2.1), deve ser observado que

$$\frac{2j-i+1}{2q} < 1, \quad i=1, \dots, p; \quad j=0, \dots, q-1$$

e, quando,

$$\frac{2j-i+1}{2q} = \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$$

haverá cancelamentos de funções gama no numerador e denominador do integrando em (2.2.1).

A Tabela 1, a seguir, dá as funções gama canceláveis no denominador de acordo com os possíveis valores de $(2j-i+1)/2q$, para p par e q par.

Da Tabela 1, pode-se ver que os cancelamentos de funções gama e consequentemente as ordens dos polos, variam de acordo com as restrições entre os valores de p e q . Pode-se ver que, para

$$q \leq p \leq 2q \quad \text{e} \quad \frac{2j-i+1}{2q} = -1, -\frac{3}{2}, \dots, i=1, \dots, p; j=0, \dots, q-1,$$

não há cancelamentos.

Assim, neste trabalho, a densidade de V em forma computável, será apresentada para

$$q \leq p \leq 2q.$$

Nos casos $2q < p \leq 3q$, $3q < p \leq 4q$, etc., a densidade é achada da mesma maneira.

TABELA 1

Funções Gama Canceláveis, para p par, q par

$(2j-i+1)/2q$	Gamas Canceláveis	Restrições
$\frac{1}{2}$	$\Gamma^{\frac{q}{2}}(s) = (s-1)^{\frac{q}{2}} \Gamma^{\frac{q}{2}}(s-1)$	$p \geq q$
0	$\Gamma^{(p/2)}(s-(1/2))$ $\Gamma^q(s-(1/2))$	$q \leq p \leq 2q$ $p > 2q$
$-\frac{1}{2}$	$\Gamma^{(p-q/2)}(s-1)$ $\Gamma^q(s-1)$	$q \leq p \leq 3q$ $p > 3q$
-1	$\Gamma^0(s-(3/2))$ $\Gamma^{(p-q/2)}(s-(3/2))$ $\Gamma^q(s-(3/2))$	$q \leq p \leq 2q$ $2q < p \leq 4q$ $p > 4q$
$-\frac{3}{2}$	$\Gamma^0(s-2)$ $\Gamma^{(p-3q/2)}(s-2)$ $\Gamma^q(s-2)$	$q \leq p \leq 3q$ $3q < p \leq 5q$ $p > 5q$
-2	$\Gamma^0(s-(5/2))$ $\Gamma^{(p-4q/2)}(s-(5/2))$ $\Gamma^q(s-(5/2))$	$q \leq p \leq 4q$ $4q < p \leq 6q$ $p > 6q$

2.3 - A DENSIDADE DE V NO CASO $q \leq p \leq 2q$, p PAR, q PAR

Neste caso, de acordo com a Tabela 1, após os cancelamentos das funções gama, no integrando de (2.2.1) tem-se

$$(2.3.1) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(v^{\frac{2}{n}} q^{pq})^{-s} \Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2}) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i) \Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}} Q(s)} ds$$

onde

$$(2.3.2) \quad Q(s) = \prod_{(u,w) \in U} \Gamma(s - \frac{1}{2} + \frac{2w-u+1}{2q}) \quad e$$

$$U = \left\{ (u,w) : u=1, \dots, p; w=0, \dots, q-1; \right. \\ \left. u \neq 2w-q+1, u \neq 2w+1, u \neq 2w+q+1 \right\}$$

Como a função gama não tem zeros, os polos são os anulantes dos vários fatores dos produtos

$$\prod_{j=0}^{\infty} (s - \frac{p}{2} + j)^{a_j} \quad e \quad \prod_{j=0}^{\infty} (s - \frac{p-1}{2} + j)^{b_j},$$

onde a_j e b_j são as ordens dos polos respectivamente dos tipos $(\frac{p}{2}-j)$ e $(\frac{p-1}{2}-j)$.

Os valores de a_j e b_j , neste caso, são

$$(2.3.3) \quad a_j = \begin{cases} q(j+1) & \text{para } j=0, 1, \dots, \frac{p}{2}-2 \\ (q-1)(p+1)/2 + 1/2 & \text{para } j=p/2-1 \\ p(q-1)/2 & \text{para } j \geq p/2 \end{cases}$$

$$(2.3.4) \quad b_j = \begin{cases} q(j+1) & \text{para } j=0, 1, \dots, \frac{p}{2}-2 \\ p(q-1)/2 & \text{para } j \geq p/2-1 \end{cases}$$

Sejam:

R_j = resíduos nos polos do tipo $\frac{p}{2}-j$, de ordem a_j ,

T_j = resíduos nos polos do tipo $\frac{p-1}{2}-j$, de ordem b_j , e

$$(2.3.5) \quad A_j = (s - \frac{p}{2} + j)^{a_j} \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}} Q(s)}.$$

Tem-se, de (2.2.3)

$$(2.3.6) \quad R_j = \frac{1}{(a_j-1)!} \lim_{s \rightarrow \frac{p}{2}-j} \frac{\partial^{a_j-1}}{\partial s^{a_j-1}} \left[(v^{\frac{2}{n}} q^{pq})^{-s} \cdot A_j \right]$$

Usando-se o fato

$$(2.3.7) \quad \frac{\partial^n}{\partial s^n} [x^{-s} \cdot f(s)] = x^{-s} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\ln x)^k \frac{\partial^{n-k}}{\partial s^{n-k}} f(s),$$

obtêm-se,

$$(2.3.8) \quad R_j = \frac{1}{(a_j-1)!} \lim_{s \rightarrow \frac{p}{2}-j} (v^{\frac{2}{n}} q^{pq})^{-s} \sum_{k=0}^{a_j-1} \binom{a_j-1}{k} (-\ln(v^{\frac{2}{n}} q^{pq}))^k \frac{\partial^{a_j-1-k}}{\partial s^{a_j-1-k}} A_j.$$

Seja agora

$$(2.3.9) \quad C_j = \frac{\partial}{\partial s} \ln A_j$$

Então,

$$(2.3.10) \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2} A_j = \frac{\partial}{\partial s} A_j \cdot C_j, \quad \text{e de modo geral}$$

$$(2.3.11) \quad A_j^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} A_j^{(k-1-r)} C_j^{(r)}$$

Onde $A_j^{(k)}$ denota a k -ésima derivada de A_j e $A_j^{(0)} \equiv A_j$.

A relação de recorrência (2.3.11), permite o cálculo da k -ésima derivada de A_j em função das derivadas de ordem inferior e da r -ésima derivada de C_j .

Denotando agora,

$$A_{0j}^{(r)} = \lim_{s \rightarrow \frac{p}{2} - j} A_j^{(r)} \quad \text{e} \quad C_{0j}^{(r)} = \lim_{s \rightarrow \frac{p}{2} - j} C_j^{(r)},$$

pode-se escrever

$$(2.3.12) \quad R_j = \frac{\left(\frac{2}{n^r} q^{pq}\right)^{j-\frac{p}{2}}}{(a_j-1)!} \left[\sum_{k=0}^{a_j-1} \binom{a_j-1}{k} (-\ln(\frac{2}{n^r} q^{pq}))^k A_{0j}^{j-1-k} \right]$$

Analogamente, obtém-se

$$(2.3.13) \quad T_j = \frac{\left(\frac{2}{n^r} q^{pq}\right)^{j-\frac{p-1}{2}}}{(b_j-1)!} \left[\sum_{k=0}^{b_j-1} \binom{b_j-1}{k} (-\ln(\frac{2}{n^r} q^{pq}))^k B_{0j}^{j-1-k} \right],$$

onde,

$$B_{0j} = \lim_{s \rightarrow \frac{p-1}{2} - j} B_j, \quad D_j = -\frac{\partial}{\partial s} \ln B_j,$$

$$(2.3.14) \quad B_j = (s - \frac{p-1}{2} + j) \frac{b_j \Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1) \prod_{i=0}^{\frac{p-2}{2}} \Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i) \prod_{i=0}^{\frac{p-2}{2}} \Gamma^q(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}} Q(s)}$$

e,

$$(2.3.15) \quad B_j^{(k)} = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{k-1}{r} B_j^{(k-1-r)} D_j^{(r)}$$

Do mesmo modo que em (2.3.11), a relação de recorrência (2.3.15) permite o cálculo da k -ésima derivada de B_j , a partir de derivadas de ordem inferior e da r -ésima derivada de D_j .

Portanto, de acordo com (2.2.2)

$$(2.3.16) \quad I = \sum_{j=0}^{\infty} (R_j + T_j)$$

Onde, R_j e T_j são dados respectivamente por (2.3.8) e (2.3.13).

Resta então, calcular $A_{0j}^{(a_j-1-k)}$ e $B_{0j}^{(b_j-1-k)}$. Como as expressões são diferentes para diferentes valores de j elas serão apresentadas por partes.

a) Para $j=0, 1, \dots, \frac{p}{2}-2$.

De (2.3.5), tendo em vista (2.3.3) e (2.3.4) e usando-se a propriedade da função gama

$$(2.3.17) \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \alpha \neq 0, -1, -2, \dots$$

obtem-se,

$$(2.3.18) \quad A_j = \frac{\Gamma^{\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{\frac{p}{2}}(s-1) \Gamma^{q(j+1)}(s-\frac{p}{2}+j+1) \prod_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}} \cdot Q(s) \cdot \prod_{i=0}^{j-1} (s-\frac{p}{2}+i)^{q(i+1)}}$$

$$(2.3.19) \quad A_{0j} = \frac{\Gamma^{\frac{p}{2}}(\frac{p-1}{2}-j) \Gamma^{\frac{p}{2}}(\frac{p-2}{2}-j) \prod_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(i-j) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(i-j+\frac{1}{2})}{(\frac{p-2}{2}-j)^{\frac{q}{2}} \cdot Q(\frac{p}{2}-j) \prod_{i=0}^{j-1} (i-j)^{q(i+1)}}$$

$$(2.3.20) \quad C_j = (q - \frac{p}{2}) \psi(s - \frac{1}{2}) + (q - \frac{p}{2}) \psi(s - 1) + q(j+1) \psi(s - \frac{p}{2} + j + 1) + \\ + q \sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \psi(s - \frac{p}{2} + i) + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \psi(s - \frac{p-1}{2} + i) - \frac{q/2}{s-1} - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{s - \frac{p}{2} + i} - Q^*(s) .$$

onde, a função $\psi(\cdot)$ é definida como (Erdélyi e outros 1953, pg. 15)

$$(2.3.21) \quad \psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = -\gamma + (z-1) \sum_{t=0}^{\infty} \{ (t+1)(z+t) \}^{-1} , \\ z \neq 0, -1, -2, \dots \quad e \quad \gamma = 0,5772156\dots \quad (\text{constante de Euler})$$

e,

$$(2.3.22) \quad Q^*(s) = \frac{d}{ds} \ln Q(s) = \sum_{(u,w) \in U} \psi(s - \frac{1}{2} + \frac{2w-u+1}{2q}) .$$

$$(2.3.23) \quad C_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q - \frac{p}{2}) \zeta(r+1, s - \frac{1}{2}) + (q - \frac{p}{2}) \zeta(r+1, s - 1) + \\ + q(j+1) \zeta(r+1, s - \frac{p}{2} + j + 1) + q \sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, s - \frac{p}{2} + i) + \\ + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, s - \frac{p-1}{2} + i) + \frac{q/2}{(s-1)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(s - \frac{p}{2} + i)^{r+1}} - Q^{**}(r, s) \}$$

onde, (Titchmarsh, 1951)

$$(2.3.24) \quad \zeta(n, z) = \sum_{r=0}^{\infty} (z+r)^{-n}; \quad \text{Re}(n) > 1, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

é a função Zeta de Riemann generalizada, e

$$(2.3.25) \quad Q^{**}(r, s) = \sum_{(u,w) \in U} \zeta(r+1, s - \frac{1}{2} + \frac{2w-u+1}{2q}) .$$

Na expressão de $C_j^{(r)}$, também foi usado o seguinte resultado

$$(2.3.26) \quad \frac{d^k}{dz^k} \ln r(a+z) = \psi(a+z) \quad \text{para } k=1 .$$

$$= (-1)^k (k-1)! \zeta(k, a+z) \quad \text{para } k \geq 2 .$$

$$(2.3.27) \quad C_{0j} = (q - \frac{p}{2}) \psi(\frac{p-1}{2} - j) + (q - \frac{p}{2}) \psi(\frac{p-2}{2} - j) - \gamma q(j+1) + q \sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \psi(i-j) +$$

$$+ q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \psi(i-j + \frac{1}{2}) - \frac{q/2}{\frac{p-2}{2} - j} - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{i-j} - Q^*(\frac{p}{2} - j)$$

$$(2.3.28) \quad C_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q - \frac{p}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-1}{2} - j) + (q - \frac{p}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-2}{2} - j) +$$

$$+ q(j+1) \zeta(r+1, 1) + q \sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(i-j) + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, i-j + \frac{1}{2}) +$$

$$+ \frac{q/2}{(\frac{p-2}{2} - j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} - Q^{**}(r, \frac{p}{2} - j) \} .$$

Partindo-se agora de (2.3.14) e usando-se a propriedade (2.3.17), obtém-se

$$(2.3.29) \quad B_j = \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1) \Gamma^{q(j+1)} (s-\frac{p-1}{2} + j+1) \prod_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^{q(s-\frac{p-1}{2} + i)} \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^{q(s-\frac{p}{2} + i)}}{(s-1)^{\frac{q}{2}} \prod_{i=0}^{j-1} (s-\frac{p-1}{2} + i)^{q(i+1)} \cdot Q(s)}$$

$$(2.3.30) \quad B_{0j} = \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(\frac{p-2}{2} - j) \Gamma^{q-\frac{p}{2}}(\frac{p-3}{2} - j) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^{q(i-j-\frac{1}{2})} \prod_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^{q(i-j)}}{(\frac{p-3}{2} - j)^{\frac{q}{2}} \prod_{i=0}^{j-1} (i-j)^{q(i+1)} \cdot Q(\frac{p-1}{2} - j)}$$

$$\begin{aligned}
 (2.3.31) \quad D_j &= (q - \frac{p}{2}) \psi(s - \frac{1}{2}) + (q - \frac{p}{2}) \psi(s - 1) + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \psi(s - \frac{p}{2} + i) + \\
 &+ q(j+1) \psi(s - \frac{p-1}{2} + j + 1) + q \sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \psi(s - \frac{p-1}{2} + i) - \frac{q/2}{s-1} - \\
 &- \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(s - \frac{p-1}{2} + i)} - Q^*(s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.3.32) \quad D_j^{(r)} &= (-1)^{r+1} r! \{ (q - \frac{p}{2}) \zeta(r+1, s - \frac{1}{2}) + (q - \frac{p}{2}) \zeta(r+1, s - 1) + \\
 &+ q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, s - \frac{p}{2} + i) + q(j+1) \zeta(r+1, s - \frac{p-1}{2} + j + 1) + \\
 &+ q \sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, s - \frac{p-1}{2} + i) + \frac{q/2}{(s-1)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(s - \frac{p-1}{2} + i)^{r+1}} - Q^{**}(r, s) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.3.33) \quad D_{0j} &= (q - \frac{p}{2}) \psi(\frac{p-2}{2} - j) + (q - \frac{p}{2}) \psi(\frac{p-3}{2} - j) + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \psi(i - j - \frac{1}{2}) - \gamma \cdot q(j+1) + \\
 &+ q \sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \psi(i - j) - \frac{q/2}{(\frac{p-3}{2} - j)} - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(i-j)} - Q^*(s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.3.34) \quad D_{0j}^{(r)} &= (-1)^{r+1} r! \{ (q - \frac{p}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-2}{2} - j) + (q - \frac{p}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-3}{2} - j) + \\
 &+ q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, i - j - \frac{1}{2}) + q(j+1) \zeta(r+1, 1) + q \sum_{i=j+1}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, i - j) + \\
 &+ \frac{q/2}{(\frac{p-3}{2} - j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} - Q^{**}(r, \frac{p}{2} - j) \}
 \end{aligned}$$

b) Para $j = \frac{p}{2} - 1$.

Semelhantemente à parte a) obtém-se,

$$(2.3.35) \quad A_j = \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{\frac{p(q-1)}{2}}(s) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(s-\frac{p-1}{2}+i)}{\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} (s-\frac{p}{2}+i)^{q(i+1)} \cdot Q(s)},$$

$$(2.3.36) \quad A_{0j} = \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(\frac{1}{2}) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(i-\frac{p-3}{2})}{\prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} (i-\frac{p-2}{2})^{q(i+1)} \cdot Q(1)},$$

$$(2.3.37) \quad C_j = (q-\frac{p}{2}) \psi(s-\frac{1}{2}) + \frac{p(q-1)}{2} \psi(s) + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \psi(s-\frac{p-1}{2}+i) - \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)} - Q^*(s),$$

$$(2.3.38) \quad C_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \left\{ (q-\frac{p}{2}) \zeta(r+1, s-\frac{1}{2}) + \frac{p(q-1)}{2} \zeta(r+1, s) + \right. \\ \left. + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, s-\frac{p-1}{2}+i) + \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}} - Q^{**}(r, s) \right\},$$

$$(2.3.39) \quad C_{0j} = (q-\frac{p}{2}) \psi(\frac{1}{2}) - \gamma \frac{p(q-1)}{2} + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \psi(i-\frac{p-3}{2}) - \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(i-\frac{p-2}{2})} - Q^*(1),$$

$$(2.3.40) \quad C_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \left\{ (q-\frac{p}{2}) \zeta(r+1, \frac{1}{2}) + \frac{p(q-1)}{2} \zeta(r+1, 1) + \right.$$

$$+ q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, i - \frac{p-3}{2}) + \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(i - \frac{p-2}{2})^{r+1}} Q^{**}(r, 1) \} .$$

As expressões para B_j , B_{0j} , D_j , $D_j^{(r)}$, D_{0j} e $D_{0j}^{(r)}$ são as mesmas que na parte c) a seguir.

c) Para $j = \frac{p}{2}, \frac{p}{2}+1, \frac{p}{2}+2, \dots$

Semelhantemente às partes a) e b) obtém-se,

$$(2.3.41) \quad A_j = \frac{r^{\frac{q-p}{2}} (s - \frac{1}{2}) r^{\frac{p(q-1)}{2}} (s - \frac{p}{2} + j + 1) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} r^q (s - \frac{p-1}{2} + i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} (s - \frac{p}{2} + i)^{q(i+1)} \prod_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} (s - \frac{p}{2} + i)^{\frac{p(q-1)}{2}} \cdot Q(s)}$$

$$(2.3.42) \quad A_{0j} = \frac{r^{\frac{q-p}{2}} (\frac{p-1}{2} - j) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} r^q (i - j + \frac{1}{2})}{(\frac{p-2}{2} - j)^{\frac{q}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} (i - j)^{q(i+1)} \prod_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} (i - j)^{\frac{p(q-1)}{2}} Q(\frac{p}{2} - j)}$$

$$(2.3.43) \quad C_j = (q - \frac{p}{2}) \psi(s - \frac{1}{2}) + \frac{p(q-1)}{2} \psi(s - \frac{p}{2} + j + 1) + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \psi(s - \frac{p-1}{2} + i) - \frac{q/2}{s-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(s - \frac{p}{2} + i)} \sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} \frac{p(q-1)/2}{(s - \frac{p}{2} + i)} Q^*(s) ,$$

$$(2.3.44) \quad C_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q - \frac{p}{2}) \zeta(r+1, s - \frac{1}{2}) + \frac{p(q-1)}{2} \zeta(r+1, s - \frac{p}{2} + j + 1) +$$

$$\begin{aligned}
& + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, s - \frac{p-1}{2} + i) + \frac{q/2}{(s-1)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(s - \frac{p}{2} + i)^{r+1}} + \\
& + \sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} \frac{p(q-1)/2}{(s - \frac{p}{2} + i)^{r+1}} - Q^{**}(r, s) \quad ,
\end{aligned}$$

$$(2.3.45) \quad C_{0j} = (q - \frac{p}{2}) \psi(\frac{p-1}{2} - j) - \gamma \frac{p(q-1)}{2} + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \psi(i - j + \frac{1}{2}) - \frac{q/2}{(\frac{p-2}{2} - j)} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(i-j)} - \sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} \frac{p(q-1)/2}{(i-j)} - Q^*(\frac{p}{2} - j) \quad ,$$

$$(2.3.46) \quad C_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q - \frac{p}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-1}{2} - j) + \frac{p(q-1)}{2} \zeta(r+1, 1) +$$

$$\begin{aligned}
& + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, i - j + \frac{1}{2}) + \frac{q/2}{(\frac{p-2}{2} - j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} + \\
& + \sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} \frac{p(q-1)/2}{(i-j)^{r+1}} - Q^{**}(r, \frac{p}{2} - j) \} \quad ,
\end{aligned}$$

$$(2.3.47) \quad B_j = \frac{r^{q-\frac{p}{2}} (s-1)^r \frac{p(q-1)}{2} (s - \frac{p-1}{2} + j + 1) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} r^q (s - \frac{p}{2} + i)}{(s-1)^{\frac{q}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} (s - \frac{p-1}{2} + i)^{q(i+1)} \prod_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} (s - \frac{p-1}{2} + i)^{\frac{p(q-1)}{2}} \cdot Q(s)} \quad ,$$

$$(2.3.48) \quad B_{0j} = \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(\frac{p-3}{2}-j) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(i-j-\frac{1}{2})}{(\frac{p-3}{2}-j)^{\frac{p}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} (i-j)^{q(i+1)} \prod_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} (i-j)^{\frac{p(q-1)}{2}} \cdot Q(\frac{p-1}{2}-j)}$$

$$(2.3.49) \quad D_j = (q-\frac{p}{2}) \psi(s-1) + \frac{p(q-1)}{2} \psi(s-\frac{p-1}{2}+j+1) + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \psi(s-\frac{p}{2}+i) - \frac{q/2}{s-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(s-\frac{p-1}{2}+i)} - \sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} \frac{p(q-1)/2}{(s-\frac{p-1}{2}+i)} - Q^*(s) \quad ,$$

$$(2.3.50) \quad D_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q-\frac{p}{2}) \zeta(r+1, s-1) + \frac{p(q-1)}{2} \zeta(r+1, s-\frac{p-1}{2}+j+1) +$$

$$+ q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \zeta(r+1, s-\frac{p}{2}+i) + \frac{q/2}{(s-1)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} +$$

$$+ \sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} \frac{p(q-1)/2}{(i-j)^{r+1}} - Q^{**}(r, s) \} \quad ,$$

$$(2.3.51) \quad D_{0j} = (q-\frac{p}{2}) \psi(\frac{p-3}{2}-j) - \gamma \cdot \frac{p(q-1)}{2} + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \psi(i-j-\frac{1}{2}) - \frac{q/2}{\frac{p-3}{2}-j} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(i-j)} - \sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} \frac{p(q-1)/2}{(i-j)} - Q(\frac{p-1}{2}-j) \quad ,$$

$$(2.3.52) \quad D_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q-\frac{p}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-3}{2}-j) + \frac{p(q-1)}{2} \zeta(r+1, 1) +$$

$$\begin{aligned}
& + q \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma(r+1, i-j-\frac{1}{2}) + \frac{q/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} + \\
& + \sum_{i=\frac{p}{2}-1}^{j-1} \frac{p(q-1)/2}{(i-j)^{r+1}} Q^{**}(r, \frac{p-1}{2}-j) \} .
\end{aligned}$$

De posse destes resultados, pode-se finalmente escrever a densidade de V , neste caso, p par e q par:

$$\begin{aligned}
(2.3.53) \quad f(v) = & C_{p,q}'' v^{\frac{1}{n^r}} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^{\frac{2}{n^r}pqj}}{(a_j-1)!} \left[\sum_{k=0}^{j-\frac{p}{2}} \binom{a_j-1}{k} (-\ln(v^{\frac{2}{n^r}pqj}))^k A_{0j}^{(a_j-1-k)} \right] + \right. \\
& \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^{\frac{2}{n^r}pqj}}{(b_j-1)!} \left[\sum_{k=0}^{j-\frac{p-1}{2}} \binom{b_j-1}{k} (-\ln(v^{\frac{2}{n^r}pqj}))^k B_{0j}^{(b_j-1-k)} \right] \right\} , \\
& 0 < v < 1 .
\end{aligned}$$

Onde, $A_{0j}^{(a_j-1-k)}$ e $B_{0j}^{(b_j-1-k)}$ são calculados através, respectivamente, das expressões (2.3.11) e (2.3.15) fazendo-se uso, conforme o caso e dependendo dos vários valores de j , das expressões (2.3.18) a (2.3.52). a_j e b_j são dados respectivamente por (2.3.3) e (2.3.4).

2.4 - A FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA DE V PARA $q \leq p \leq 2q$, p PAR, q PAR.

Para calcular a função distribuição acumulada, $F(x)$, será utilizado o seguinte resultado (ver Mathai e Rathie, 1971b)

$$(2.4.1) \quad \int_0^x u^\alpha (-\ln u)^{m-1} du = x^{\alpha+1} \sum_{t=1}^m \frac{m(m-1)\dots(m-t+1)(-\ln x)^{m-t}}{m(\alpha+1)^t} ,$$

$\alpha > 0; m=1, 2, \dots; 0 < u < 1 .$

Assim, de (2.3.53)

$$(2.4.2) \quad F(x) = C_{p,q}'' \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^{pq})^{-\frac{1}{2}}}{(a_j-1)!} \left[\sum_{k=0}^{a_j-1} \binom{a_j-1}{k} A_{0j}^{(a_j-1-k)} \int_0^x \frac{2}{(v^{\frac{2}{n'}} q^{pq})^{j-\frac{p}{2}+\frac{1}{2}}} (-\ln(v^{\frac{2}{n'}} q^{pq}))^k dv \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^{pq})^{-\frac{1}{2}}}{(b_j-1)!} \left[\sum_{k=0}^{b_j-1} \binom{b_j-1}{k} B_{0j}^{(b_j-1-k)} \int_0^x \frac{2}{(v^{\frac{2}{n'}} q^{pq})^{j-\frac{p}{2}+1}} (-\ln(v^{\frac{2}{n'}} q^{pq}))^k dv \right] \right\}, \quad 0 < x \leq 1.$$

Fazendo a mudança de variável $u = v^{\frac{2}{n'}} q^{pq}$ e usando o resultado (2.4.1), obtém-se,

$$(2.4.3) \quad F(x) = C_{p,q}'' \frac{n'}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^{pq})^{j-\frac{p}{2}}}{(a_j-1)!} \left[\sum_{k=0}^{a_j-1} \binom{a_j-1}{k} A_{0j}^{(a_j-1-k)} \cdot x^{\frac{2j}{n'} - \frac{p-1}{n'} + 1} \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(r+1)r(r-1)\dots(r-t+2) (-\ln(v^{\frac{2}{n'}} q^{pq}))^{r-t+1}}{(r+1) (\frac{n'}{2} - \frac{p-1}{2} + j)} \right] + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q^{pq})^{j-\frac{p-1}{2}}}{(b_j-1)!} \left[\sum_{k=0}^{b_j-1} \binom{b_j-1}{k} B_{0j}^{(b_j-1-k)} \cdot x^{\frac{2j}{n'} - \frac{p-2}{n'} + 1} \sum_{t=1}^{r+1} \frac{(r+1)r(r-1)\dots(r-t+2) (-\ln(v^{\frac{2}{n'}} q^{pq}))^{r-t+1}}{(r+1) (\frac{n'}{2} - \frac{p-2}{2} + j)} \right] \right\}, \quad 0 < x \leq 1.$$

2.5 - A DENSIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE V PARA $q \leq p \leq 2q$, p ÍMPAR, q ÍMPAR

Neste caso, bem como nos seguintes, os resultados serão apresentados sem maiores comentários, devido à perfeita analogia com o caso anterior.

Assim, após os cancelamentos das funções gama no integrando de (2.2.1) obtêm-se

$$(2.5.1) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_L (v^{n^r} q^{pq})^{-s} \frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(s-1) \prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i) \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \Gamma^q(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{(q-1)/2} Q(s)}.$$

As ordens a_j e b_j dos polos respectivamente dos tipos $s=\frac{p}{2}-j$ e $s=\frac{p-1}{2}-j$ são

$$(2.5.2) \quad a_j = \begin{cases} q(j+1) & j=0, 1, \dots, \frac{p-3}{2} \\ \frac{(q-1)(p+1)}{2} & j \geq \frac{p-1}{2} \end{cases}$$

$$(2.5.3) \quad b_j = \begin{cases} q(j+1) & j=0, 1, \dots, \frac{p-5}{2} \\ \frac{p(q-1)}{2} & j=\frac{p-3}{2} \\ \frac{(q-1)(p-1)}{2} & j \geq \frac{p-1}{2} \end{cases}.$$

Agora, analogamente ao caso anterior, obtêm-se

a) Para $j=0, 1, \dots, \frac{p-5}{2}$

$$(2.5.4) \quad A_j = \frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(s-1) \Gamma^{q(j+1)}(s-\frac{p}{2}+j+1) \prod_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}} \Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i) \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \Gamma^q(s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{\frac{q-1}{2}} \prod_{i=0}^{j=1} (s-\frac{p}{2}+i)^{q(i+1)} \cdot Q(s)}$$

$$(2.5.5) \quad C_j = (q-\frac{p+1}{2}) \psi(s-\frac{1}{2}) + (q-\frac{p-1}{2}) \psi(s-1) + q(j+1) \psi(s-\frac{p}{2}+j+1) +$$

$$+q \sum_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}} \psi(s-\frac{p}{2}+i) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \psi(s-\frac{p-1}{2}+i) - \frac{(q-1)/2}{s-1} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{s-\frac{p}{2}+i} - Q^*(s),$$

$$(2.5.6) \quad C_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q-\frac{p+1}{2}) \zeta(r+1, s-\frac{1}{2}) + (q-\frac{p-1}{2}) \zeta(r+1, s-1) +$$

$$+q(j+1) \zeta(r+1, s-\frac{p}{2}+1) + q \sum_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}} \zeta(r+1, s-\frac{p}{2}+i) +$$

$$+q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \zeta(r+1, s-\frac{p-1}{2}+i) + \frac{(q-1)/2}{(s-1)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}} - Q^{**}(r, s) \},$$

$$(2.5.7) \quad A_{0j} = \frac{r^{q-\frac{p+1}{2}} (\frac{p-1}{2}-j) r^{q-\frac{p-1}{2}} (\frac{p-2}{2}-j) \prod_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}} (i-j) \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} r^q (i-j+\frac{1}{2})}{(\frac{p-2}{2}-j) \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{\prod_{i=0}^{j-1} (i-j)} \cdot Q(\frac{p}{2}-j)},$$

$$(2.5.8) \quad C_{0j} = (q-\frac{p+1}{2}) \psi(\frac{p-1}{2}-j) + (q-\frac{p-1}{2}) \psi(\frac{p-2}{2}-j) - \gamma q(j+1) +$$

$$+q \sum_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}} \psi(i-j) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \psi(i-j+\frac{1}{2}) - \frac{(q-1)/2}{(\frac{p-2}{2}-j)} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(i-j)} - Q^*(\frac{p}{2}-j),$$

$$(2.5.9) \quad C_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q-\frac{p+1}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-1}{2}-j) + (q-\frac{p-1}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-2}{2}) +$$

$$+q(j+1) \zeta(r+1, 1) + q \sum_{i=j+1}^{\frac{p-3}{2}} \zeta(r+1, i-j) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \zeta(r+1, i-j+\frac{1}{2}) +$$

$$+ \frac{(q-1)/2}{(\frac{p-2}{2}-j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} - Q^{**}(r, \frac{p}{2}-j) \},$$

$$(2.5.10) \quad B_j = \frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(s-1) \prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \Gamma^{q(s-\frac{p}{2}+i)} \prod_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}} \Gamma^{q(j+1)} (s-\frac{p-1}{2}+j+1)}{(s-1)^{\frac{q-1}{2}} \prod_{i=0}^{j-1} (s-\frac{p-1}{2}+i)^{q(i+1)} \cdot Q(s)}$$

$$(2.5.11) \quad D_j = (q-\frac{p+1}{2}) \psi(s-\frac{1}{2}) + (q-\frac{p-1}{2}) \psi(s-1) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \psi(s-\frac{p}{2}+i) +$$

$$+ q \sum_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}} \psi(s-\frac{p-1}{2}+i) + q(j+1) \psi(s-\frac{p-1}{2}+j+1) - \frac{(q-1)/2}{s-1} -$$

$$- \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{s-\frac{p-1}{2}+i} - Q^*(s) ,$$

$$(2.5.12) \quad D_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q-\frac{p+1}{2}) \zeta(r+1, s-\frac{1}{2}) + (q-\frac{p-1}{2}) \zeta(r+1, s-1) +$$

$$+ q \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \zeta(r+1, s-\frac{p}{2}+i) + q \sum_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}} \zeta(r+1, s-\frac{p-1}{2}+i) +$$

$$+ q(j+1) \zeta(r+1, s-\frac{p-1}{2}+j+1) + \frac{(q-1)/2}{(s-1)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(s-\frac{p-1}{2}+i)^{r+1}} - Q^{**}(r, s) \} ,$$

$$(2.5.13) \quad B_{0j} = \frac{\Gamma^{q-\frac{p+1}{2}}(\frac{p-2}{2}-j) \Gamma^{q-\frac{p-1}{2}}(\frac{p-3}{2}-j) \prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \Gamma^{q(i-j-\frac{1}{2})} \prod_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}} (i-j)}{(\frac{p-3}{2}-j)^{\frac{q-1}{2}} \prod_{i=0}^{j-1} (i-j-\frac{1}{2})^{q(i+1)} Q(\frac{p-1}{2}-j)}$$

$$(2.5.14) \quad D_{0j} = (q-\frac{p-1}{2}) \psi(\frac{p-2}{2}-j) + (q-\frac{p-1}{2}) \psi(\frac{p-3}{2}-j) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \psi(i-j-\frac{1}{2}) +$$

$$+q \sum_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}} \psi(i-j) - \gamma q(j+1) - \frac{(q-1)/2}{\frac{p-3}{2}-j} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{i-j} - Q^*(\frac{p-1}{2}-j) ,$$

$$(2.5.15) \quad D_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q - \frac{p+1}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-2}{2}-j) + (q - \frac{p-1}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-3}{2}-j) +$$

$$+q \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \zeta(r+1, i-j-\frac{1}{2}) + q \sum_{i=j+1}^{\frac{p-5}{2}} \zeta(r+1, i-j) + q(j+1) \zeta(r+1, 1) +$$

$$+ \frac{(q-1)/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} - Q^{**}(r, \frac{p-1}{2}-j) \} .$$

b) Para $j = \frac{p-3}{2}$

As expressões de A_j , A_{0j} , C_j , $C_j^{(r)}$, C_{0j} e $C_{0j}^{(r)}$ são as mesmas da parte a), e

$$(2.5.16) \quad B_j = \frac{r^{q-\frac{p+1}{2}} (s-\frac{1}{2})^r \frac{(q-1)(p-1)}{2} \frac{p-5}{2} (s) \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} r^{q(s-\frac{p}{2}+i)}}{\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} (s-\frac{p-1}{2}+i)^{q(i+1)} \cdot Q(s)} ,$$

$$(2.5.17) \quad D_j = (q - \frac{p+1}{2}) \psi(s - \frac{1}{2}) + \frac{(q-1)(p-1)}{2} \psi(s) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \psi(s - \frac{p}{2} + i) - \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \frac{q(i+1)}{s - \frac{p-1}{2} + i} - Q^*(s) ,$$

$$(2.5.18) \quad D_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q - \frac{p+1}{2}) \zeta(r+1, s - \frac{1}{2}) + \frac{(q-1)(p-1)}{2} \zeta(r+1, s) +$$

$$+ q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \zeta(r+1, s - \frac{p}{2} + i) + \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \frac{q(i+1)}{(s - \frac{p-1}{2} + i)^{r+1}} - Q^{**}(r, s) \} ,$$

$$(2.5.19) \quad B_{0j} = \frac{r^{q-\frac{p+1}{2}} \left(\frac{p-2}{2}-j\right) r^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}} \left(\frac{p-1}{2}-j\right) \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} r^{q(i-j-\frac{1}{2})}}{\prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} (i-j)^{q(i+1)} Q\left(\frac{p-1}{2}-j\right)},$$

$$(2.5.20) \quad D_{0j} = \left(q-\frac{p+1}{2}\right) \psi\left(\frac{p-2}{2}-j\right) + \frac{(q-1)(p-1)}{2} \psi\left(\frac{p-1}{2}-j\right) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \psi\left(i-j-\frac{1}{2}\right) - \\ - \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \frac{q(i+1)}{i-j} - Q^*\left(\frac{p-1}{2}-j\right),$$

$$(2.5.21) \quad D_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \left\{ \left(q-\frac{p+1}{2}\right) \zeta\left(r+1, \frac{p-2}{2}-j\right) + \frac{(q-1)(p-1)}{2} \zeta\left(r+1, \frac{p-1}{2}-j\right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \zeta\left(r+1, i-j-\frac{1}{2}\right) + \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} - Q^{**}\left(r, \frac{p-1}{2}-j\right) \right\}.$$

c) Para $j = \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}, \dots$

$$(2.5.22) \quad A_j = \frac{r^{q-\frac{p-1}{2}} (s-1) r^{\frac{(q-1)(p+1)}{2}} \left(s-\frac{p}{2}+j+1\right) \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} r^{q\left(s-\frac{p-1}{2}+i\right)}}{(s-1)^{\frac{q-1}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \left(s-\frac{p}{2}+i\right)^{q(i+1)} \prod_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1} \left(s-\frac{p}{2}+i\right)^{j-1} \frac{(q-1)(p+1)}{2} Q(s)}$$

$$(2.5.23) \quad C_j = \left(q-\frac{p-1}{2}\right) \psi(s-1) + \frac{(q-1)(p+1)}{2} \psi\left(s-\frac{p}{2}+j+1\right) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \psi\left(s-\frac{p-1}{2}+i\right) -$$

$$\frac{(q-1)/2}{s-1} \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \frac{q(i+1)}{s-\frac{p}{2}+i} - \sum_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1} \frac{(q-1)(p+1)/2}{s-\frac{p}{2}+i} - Q^*(s) ,$$

$$(2.5.24) \quad C_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \left\{ (q-\frac{p-1}{2}) \zeta(r+1, s-1) + \frac{(q-1)(p+1)}{2} \zeta(r+1, s-\frac{p}{2}+j+1) + \right. \\ \left. + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \zeta(r+1, s-\frac{p-1}{2}+i) + \frac{(q-1)/2}{(s-1)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \frac{q(i+1)}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}} + \right. \\ \left. + \sum_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1} \frac{(q-1)(p-1)/2}{(s-\frac{p}{2}+i)^{r+1}} - Q^{**}(r, s) \right\} ,$$

$$(2.5.25) \quad A_{0j} = \frac{r^{q-\frac{p-1}{2}} (\frac{p-2}{2}-j) \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} r^{q(i-j+\frac{1}{2})}}{(\frac{p-2}{2}-j)^{\frac{q-1}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} (i-j)^{q(i+1)} \prod_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1} (i-j)^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}} Q(\frac{p}{2}-j)}$$

$$(2.5.26) \quad C_{0j} = (q-\frac{p-1}{2}) \psi(\frac{p-2}{2}-j) - \gamma \frac{(q-1)(p+1)}{2} + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \psi(i-j+\frac{1}{2}) - \frac{(q-1)/2}{\frac{p-2}{2}-j} - \\ - \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \frac{q(i+1)}{i-j} - \sum_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1} \frac{(q-1)(p+1)/2}{i-j} - Q^*(\frac{p}{2}-j) ,$$

$$(2.5.27) \quad C_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \left\{ (q-\frac{p-1}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-2}{2}-j) + \frac{(q-1)(p+1)}{2} \zeta(r+1, 1) + \right. \\ \left. + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \zeta(r+1, i-j+\frac{1}{2}) + \frac{(q-1)/2}{(\frac{p-2}{2}-j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} + \right.$$

$$+ \sum_{i=\frac{p-1}{2}}^{j-1} \frac{(q-1)(p+1)/2 - Q^{**}(r, \frac{p}{2}-j)}{(i-j)^{r+1}} ,$$

$$(2.5.28) \quad B_j = \frac{r^{\frac{q-p+1}{2}} (s-\frac{1}{2})^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}} (s-\frac{p-1}{2}+j+1)^{\frac{p-5}{2}} \prod_{i=0}^{p-5} r^{q(s-\frac{p}{2}+i)}}{(s-1)^{\frac{q-1}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} (s-\frac{p-1}{2}+i)^{q(i+1)} \prod_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} (s-\frac{p-1}{2}+i)^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}} Q(s)} ,$$

$$(2.5.29) \quad D_j = (q-\frac{p+1}{2}) \psi(s-\frac{1}{2}) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \psi(s-\frac{p}{2}+i) + \frac{(q-1)(p-1)}{2} \psi(s-\frac{p-1}{2}+j+1) -$$

$$- \frac{(q-1)/2}{s-1} \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \frac{q(i+1)}{s-\frac{p-1}{2}+i} - \sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{(q-1)(p-1)/2 - Q^*(s)}{s-\frac{p-1}{2}+i} ,$$

$$(2.5.30) \quad D_j^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q-\frac{p+1}{2}) \zeta(r+1, s-\frac{1}{2}) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \zeta(r+1, s-\frac{p}{2}+i) +$$

$$+ \frac{(q-1)(p-1)}{2} \zeta(r+1, s-\frac{p-1}{2}+j+1) + \frac{(q-1)/2}{(s-1)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \frac{q(i+1)}{(s-\frac{p-1}{2}+i)^{r+1}} +$$

$$+ \sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{(q-1)(p-1)/2 - Q^{**}(r, s)}{(s-\frac{p-1}{2}+i)^{r+1}} \} ,$$

$$(2.5.31) \quad B_{0j} = \frac{r^{\frac{q-p+1}{2}} (\frac{p-2}{2}-j)^{\frac{p-5}{2}} \prod_{i=0}^{p-5} r^{q(i-j-\frac{1}{2})}}{(\frac{p-3}{2}-j)^{\frac{q-1}{2}} \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} (i-j)^{q(i+1)} \prod_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} (i-j)^{\frac{(q-1)(p-1)}{2}} Q(\frac{p-1}{2}-j)} ,$$

$$(2.5.32) \quad D_{0j} = (q - \frac{p+1}{2}) \psi(\frac{p-2}{2} - j) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \psi(i - j - \frac{1}{2}) - \gamma \frac{(q-1)(p-1)}{2} - \frac{(q-1)/2}{\frac{p-3}{2} - j} -$$

$$- \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \frac{q(i+1)}{i-j} - \sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{(q-1)(p-1)/2}{i-j} Q^*(\frac{p-1}{2} - j) \quad ,$$

$$(2.5.33) \quad D_{0j}^{(r)} = (-1)^{r+1} r! \{ (q - \frac{p+1}{2}) \zeta(r+1, \frac{p-2}{2} - j) + q \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \zeta(r+1, i - j - \frac{1}{2}) +$$

$$+ \frac{(q-1)(p-1)}{2} \zeta(r+1, 1) + \frac{(q-1)/2}{(\frac{p-3}{2} - j)^{r+1}} + \sum_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} \frac{q(i+1)}{(i-j)^{r+1}} +$$

$$+ \sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{(q-1)(p-1)/2}{(i-j)^{r+1}} Q^{**}(r, \frac{p-1}{2} - j) \} \quad .$$

A densidade e a distribuição de V, neste caso, tem as mesmas expressões que (2.3.53) e (2.4.3) respectivamente, agora com a_j e b_j dados por (2.5.2) e (2.5.3) e $A_{0j}^{(\cdot)}$ e $B_{0j}^{(\cdot)}$ sendo calculados através das expressões (2.5.4) a (2.5.33) conforme o caso.

2.6 - A DENSIDADE E DISTRIBUIÇÃO DE V PARA $q < p < 2q$, p PAR, q ÍMPAR

Neste caso, após os cancelamentos de funções gama no integrando de (2.2.1) obtém-se

$$(2.6.1) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(v^{\frac{2}{n}} q^{pq})^{-s}}{(s-1)^{\frac{q-1}{2}} Q(s)} \frac{\Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{q-\frac{p}{2}}(s-1) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(s-\frac{p}{2}+i) \prod_{i=0}^{\frac{p}{2}-2} \Gamma^q(s-\frac{p-1}{2}+i)}{Q(s)}$$

As ordens a_j e b_j respectivamente dos polos $s = \frac{p}{2} - j$ e $s = \frac{p-1}{2} - j$ são

$$(2.6.2) \quad a_j = \begin{cases} q(j+1) & j=0, 1, \dots, \frac{p}{2}-2 \\ \frac{(q-1)(p+1)}{2} & j=\frac{p}{2}-1 \\ \frac{p(q-1)}{2} & j \geq \frac{p}{2} \end{cases}$$

$$(2.6.3) \quad b_j = \begin{cases} q(j+1) & j=0, 1, \dots, \frac{p}{2}-2 \\ \frac{p(q-1)}{2} & j \geq \frac{p}{2}-1 \end{cases}$$

Obtém-se, analogamente aos casos anteriores

a) Para $j=0, 1, \dots, \frac{p}{2}-2$.

$$(2.6.4) \quad A_j = (A_j \text{ em (2.3.18)}) \cdot (s-1)^{1/2}$$

$$(2.6.5) \quad C_j = (C_j \text{ em (2.3.20)}) + \frac{1/2}{s-1}$$

$$(2.6.6) \quad C_j^{(r)} = (C_j^{(r)} \text{ em (2.3.23)}) + (-1)^r r! \left[\frac{1/2}{(s-1)^{r+1}} \right]$$

$$(2.6.7) \quad A_{0j} = (A_{0j} \text{ em (2.3.19)}) \cdot \left(\frac{p-2}{2} - j\right)^{1/2}$$

$$(2.6.8) \quad C_{0j} = (C_{0j} \text{ em (2.3.27)}) + \frac{1/2}{\frac{p-2}{2} - j}$$

$$(2.6.9) \quad C_{0j}^{(r)} = (C_{0j}^{(r)} \text{ em (2.3.28)}) + (-1)^r r! \left[\frac{1/2}{\left(\frac{p-2}{2} - j\right)^{r+1}} \right]$$

$$(2.6.10) \quad B_j = (B_j \text{ em (2.3.29)}) \cdot (s-1)^{1/2}$$

$$(2.6.11) \quad D_j = (D_j \text{ em (2.3.31)}) + \frac{1/2}{s-1}$$

$$(2.6.12) \quad D_j^{(r)} = (D_j^{(r)} \text{ em (2.3.32)}) + (-1)^r r! \left[\frac{1/2}{(s-1)^{r+1}} \right]$$

$$(2.6.13) \quad B_{0j} = (B_{0j} \text{ em (2.3.30)}) \cdot \left(\frac{p-3}{2} - j\right)^{1/2}$$

$$(2.6.14) \quad D_{0j} = (D_{0j} \text{ em (2.3.33)}) - \frac{1/2}{\frac{p-3}{2}-j}$$

$$(2.6.15) \quad D_{0j}^{(r)} = (D_{0j}^{(r)} \text{ em (2.3.34)}) + (-1)^r r! \left[\frac{1/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}} \right]$$

b) Para $j = \frac{p}{2} - 1$

As expressões de A_j , C_j , $C_j^{(r)}$, A_{0j} , C_{0j} , $C_{0j}^{(r)}$, B_j , D_j , $D_j^{(r)}$, B_{0j} , D_{0j} e $D_{0j}^{(r)}$ são as mesmas do caso p par, q par.

c) Para $j = \frac{p}{2}, \frac{p}{2} + 1, \dots$

$$(2.6.16) \quad A_j = (A_j \text{ em (2.3.41)}) \cdot (s-1)^{1/2}$$

$$(2.6.17) \quad C_j = (C_j \text{ em (2.3.43)}) + \frac{1/2}{s-1}$$

$$(2.6.18) \quad C_j^{(r)} = (C_j^{(r)} \text{ em (2.3.44)}) + (-1)^r r! \left[\frac{1/2}{(s-1)^{r+1}} \right]$$

$$(2.6.19) \quad A_{0j} = (A_{0j} \text{ em (2.3.42)}) \cdot (\frac{p-2}{2}-j)^{1/2}$$

$$(2.6.20) \quad C_{0j} = (C_{0j} \text{ em (2.3.45)}) + \frac{1/2}{\frac{p-2}{2}-j}$$

$$(2.6.21) \quad C_{0j}^{(r)} = (C_{0j}^{(r)} \text{ em (2.3.46)}) + (-1)^r r! \left[\frac{1/2}{(\frac{p-2}{2}-j)^{r+1}} \right]$$

$$(2.6.22) \quad B_j = (B_j \text{ em (2.3.47)}) \cdot (s-1)^{1/2}$$

$$(2.6.23) \quad D_j = (D_j \text{ em (2.3.49)}) + \frac{1/2}{s-1}$$

$$(2.6.24) \quad D_j^{(r)} = (D_j^{(r)} \text{ em (2.3.50)}) + (-1)^r r! \left[\frac{1/2}{(s-1)^{r+1}} \right]$$

$$(2.6.25) \quad B_{0j} = (B_{0j} \text{ em (2.3.48)}) \cdot (\frac{p-3}{2}-j)^{1/2}$$

$$(2.6.26) \quad D_{0j} = (D_{0j} \text{ em (2.3.51)}) + \frac{1/2}{\frac{p-3}{2}-j}$$

$$(2.6.27) \quad D_{0j}^{(r)} = (D_{0j}^{(r)} \text{ em (2.3.52)}) + (-1)^r r! \left[\frac{1/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}} \right]$$

A densidade e distribuição de V, neste caso, tem as mesmas expressões que (2.3.53) e (2.4.3) respectivamente com a_j e b_j dados por (2.6.2) e (2.6.3) e $A_{0j}^{(\cdot)}$ e $B_{0j}^{(\cdot)}$ sendo calculados através das expressões (2.6.4) a (2.6.27) conforme o caso.

2.7 - A DENSIDADE E A DISTRIBUIÇÃO DE V PARA $q < p \leq 2q$, p ÍMPAR, q PAR

Neste caso, após as simplificações das funções gama no integrando de (2.2.1), obtêm-se

$$(2.7.1) \quad I = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(v^{\frac{1}{n}} q^{pq})^{-s} \Gamma^{\frac{p+1}{2}}(s-\frac{1}{2}) \Gamma^{\frac{p+1}{2}}(s-1) \prod_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} (s-\frac{p}{2}+i) \prod_{i=0}^{\frac{p-5}{2}} (s-\frac{p-1}{2}+i)}{(s-1)^{q/2} Q(s)}$$

As ordens a_j e b_j dos polos respectivamente dos tipos $s=\frac{p}{2}-j$ e $s=\frac{p-1}{2}-j$ são

$$(2.7.2) \quad a_j = \begin{cases} q(j+1) & j=0, 1, \dots, \frac{p-3}{2} \\ \frac{(q-1)(p+1)}{2} & j \geq \frac{p-1}{2} \end{cases}$$

$$(2.7.3) \quad b_j = \begin{cases} q(j+1) & j=0, 1, \dots, \frac{p-5}{2} \\ \frac{p(q-1)}{2} - \frac{1}{2} & j = \frac{p-3}{2} \\ \frac{(q-1)(p-1)}{2} - 1 & j \geq \frac{p-1}{2} \end{cases}$$

Analogamente aos casos anteriores, obtêm-se

a) Para $j=0,1,\dots,\frac{p-5}{2}$

$$(2.7.4) \quad A_j = (A_j \text{ em (2.5.4)}) / [(s-1)^{1/2} \Gamma(s-1)]$$

$$(2.7.5) \quad C_j = (C_j \text{ em (2.5.5)}) - \psi(s-1) - \frac{1/2}{s-1}$$

$$(2.7.6) \quad C_j^{(r)} = (C_j^{(r)} \text{ em (2.5.6)}) + (-1)^r r! \left[\zeta(r+1, s-1) - \frac{1/2}{(s-1)^{r+1}} \right]$$

$$(2.7.7) \quad A_{0j} = (A_{0j} \text{ em (2.5.7)}) / \left[\left(\frac{p-3}{2} - j \right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{p-3}{2} - j\right) \right]$$

$$(2.7.8) \quad C_{0j} = (C_{0j} \text{ em (2.5.8)}) - \psi\left(\frac{p-3}{2} - j\right) - \frac{1/2}{\frac{p-3}{2} - j}$$

$$(2.7.9) \quad C_{0j}^{(r)} = (C_{0j}^{(r)} \text{ em (2.5.9)}) + (-1)^r r! \left[\zeta\left(r+1, \frac{p-3}{2} - j\right) - \frac{1/2}{\left(\frac{p-3}{2} - j\right)^{r+1}} \right]$$

$$(2.7.10) \quad B_j = (B_j \text{ em (2.5.10)}) / [(s-1)^{1/2} \Gamma(s-1)]$$

$$(2.7.11) \quad D_j = (D_j \text{ em (2.5.11)}) - \psi(s-1) - \frac{1/2}{s-1}$$

$$(2.7.12) \quad D_j^{(r)} = (D_j^{(r)} \text{ em (2.5.12)}) + (-1)^r r! \left[\zeta(r+1, s-1) - \frac{1/2}{(s-1)^{r+1}} \right]$$

$$(2.7.13) \quad B_{0j} = (B_{0j} \text{ em (2.5.13)}) / \left[\left(\frac{p-3}{2} - j \right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{p-3}{2} - j\right) \right]$$

$$(2.7.14) \quad D_{0j} = (D_{0j} \text{ em (2.5.14)}) - \psi\left(\frac{p-3}{2} - j\right) - \frac{1/2}{\frac{p-3}{2} - j}$$

$$(2.7.15) \quad D_{0j}^{(r)} = (D_{0j}^{(r)} \text{ em (2.5.15)}) + (-1)^r r! \left[\zeta\left(r+1, \frac{p-3}{2} - j\right) - \frac{1/2}{\left(\frac{p-3}{2} - j\right)^{r+1}} \right]$$

b) Para $j=\frac{p-3}{2}$

As expressões de A_j , C_j , $C_j^{(r)}$, A_{0j} , C_{0j} , $C_{0j}^{(r)}$, são as mesmas da parte a) acima, e

$$(2.7.16) \quad B_j = (B_j \text{ em (2.5.16)}) / \Gamma(s)$$

$$(2.7.17) \quad D_j = (D_j \text{ em (2.5.17)}) - \psi(s)$$

$$(2.7.18) \quad D_j^{(r)} = (D_j^{(r)} \text{ em (2.5.18)}) + (-1)^r r! [\zeta(r+1, s)]$$

$$(2.7.19) \quad B_{0j} = (B_{0j} \text{ em (2.5.19)}) / \Gamma(\frac{p-1}{2} - j)$$

$$(2.7.20) \quad D_{0j} = (D_{0j} \text{ em (2.5.20)}) - \psi(\frac{p-1}{2} - j)$$

$$(2.7.21) \quad D_{0j}^{(r)} = (D_{0j}^{(r)} \text{ em (2.5.21)}) + (-1)^r r! [\zeta(r+1, \frac{p-1}{2} - j)]$$

c) Para $j = \frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{2}, \dots$

$$(2.7.22) \quad A_j = (A_j \text{ em (2.5.22)}) / [(s-1)^{1/2} \Gamma(s-1)]$$

$$(2.7.23) \quad C_j = (C_j \text{ em (2.5.23)}) - \psi(s-1) - \frac{1/2}{s-1}$$

$$(2.7.24) \quad C_j^{(r)} = (C_j^{(r)} \text{ em (2.5.24)}) + (-1)^r r! \left[\zeta(r+1, s-1) - \frac{1/2}{(s-1)^{r+1}} \right]$$

$$(2.7.25) \quad A_{0j} = (A_{0j} \text{ em (2.5.25)}) / \left[(\frac{p-3}{2} - j)^{1/2} \Gamma(\frac{p-3}{2} - j) \right]$$

$$(2.7.26) \quad C_{0j} = (C_{0j} \text{ em (2.5.26)}) - \psi(\frac{p-3}{2} - j) - \frac{1/2}{\frac{p-3}{2} - j}$$

$$(2.7.27) \quad C_{0j}^{(r)} = (C_{0j}^{(r)} \text{ em (2.5.27)}) + (-1)^r r! \left[\zeta(r+1, \frac{p-3}{2} - j) - \frac{1/2}{(\frac{p-3}{2} - j)^{r+1}} \right]$$

$$(2.7.28) \quad B_j = (B_j \text{ em (2.5.28)}) \cdot \frac{\prod_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} (s - \frac{p-1}{2} + 1)}{(s-1)^{1/2} \Gamma(s - \frac{p-1}{2} + j + 1)}$$

$$(2.7.29) \quad D_j = (D_j \text{ em (2.5.29)}) + \sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{1}{s - \frac{p-1}{2} + i} \psi(s - \frac{p-1}{2} + j + 1) - \frac{1/2}{s-1}$$

$$(2.7.30) \quad D_j^{(r)} = (D_j^{(r)} \text{ em (2.5.30)}) + (-1)^r r! \left[\sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{1}{(s-\frac{p-1}{2}+i)^{r+1}} - \frac{1/2}{(s-1)^{r+1}} + \zeta(r+1, s-\frac{p-1}{2}+j+1) \right]$$

$$(2.7.31) \quad B_{0j} = (B_{0j} \text{ em (2.5.31)}) \cdot \frac{\prod_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} (i-j)}{(\frac{p-3}{2}-j)^{1/2}}$$

$$(2.7.32) \quad D_{0j} = (D_{0j} \text{ em (2.5.32)}) + \sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{1}{i-j}$$

$$(2.7.33) \quad D_{0j}^{(r)} = (D_{0j}^{(r)} \text{ em (2.5.33)}) + (-1)^r r! \left[\sum_{i=\frac{p-3}{2}}^{j-1} \frac{1}{(i-j)^{r+1}} - \frac{1/2}{(\frac{p-3}{2}-j)^{r+1}} + \zeta(r+1, 1) \right]$$

A densidade e a distribuição de V tem as mesmas expressões de (2.3.53) e (2.4.3) respectivamente, com a_j e b_j dados por (2.7.2) e (2.7.3) e $A_{0j}^{(\cdot)}$ e $B_{0j}^{(\cdot)}$ sendo calculados através das expressões (2.7.4) a (2.7.33) conforme o caso.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Ahlfors, L.V. (1966). Complex Analysis. McGraw-Hill, New York.
- [2] Anderson, T.W. (1958). Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley, New York.
- [3] Bartlett, M.S. (1937). Properties of Sufficiency and Statistical Tests. Proc. Roy. Soc. A, 160, 268-282.
- [4] Box, G.E.P. (1949). A General Distribution Theory for a Class of Likelihood Criteria. Biometrika 36, 317-346.
- [5] Braaksma, B.L.J. (1964). Asymptotic Expansions and Analytic Continuations for Barnes Integrals. Compositio Mathematica, 15, 239-341.
- [6] Cordeiro, J.A. (1980). Distribuições Exatas de Testes de Hipótese Multivariados. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas.
- [7] Epstein, B. (1948). Some Applications of Mellin Transform in Statistics. Ann. Math. Statist. 19, 370-379.
- [8] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. e Tricomi, G.F. (1953). Higher Transcendental Functions, Vol. I. McGraw-Hill, New York.
- [9] Fox, C. (1961). The G and H Functions as Symmetric Fourier Kernels. Trans. Amer. Math. Soc., 98.
- [10] Jain, S.K., Rathie, P.N. e Shah, M.C. (1975). The Exact Distributions of Certain Likelihood Ratio Criteria. Sankhyā, A, 37, 150-163.
- [11] Katyiar, R.S. e Mathai, A.M. (1979a). Exact Percentage Points for the Problem of Testing Independence. Biometrika 66, 353-356.
- [12] ——— (1979b). The Distribution and the Exact Percentage Points for Wilks' L_{mvc} Criterion. Ann. Inst. Statist. Math., 31, 215-223.
- [13] ——— (1980). Exact Percentage Points for Three Tests As-

- sociated with Exponential Populations. *Sankhyā*, B, 42, 33-41.
- [14] Lomnicki, Z.A. (1967). On the Distribution of Products of Random Variables. *J. Royal Statist. Association*, B, 29, 513-524.
 - [15] Luke, Y.L. (1969). *The Special Functions and Their Approximations*. Academic Press, New York.
 - [16] Mathai, A.M. (1970). Exact Distribution of a Criterion for Testing the Hypothesis that Several Multivariate Populations are Identical. *J. Indian Statist. Assoc.*, 8, 1-17.
 - [17] ——— (1971). The Exact Distribution of Bartlett's Criterion for Testing Equality of Covariance Matrices. *Publ. L'ISUP, Paris*, 19, 1-15, 1970.
 - [18] Mathai, A.M. e Rathie, P.N. (1970). The Exact Distribution of Votaw's Criteria. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 23, 89-116.
 - [19] ——— (1971a). The Exact Distribution of Wilk's Generalized Variance in the Non-Central Linear Case. *Sankhyā*, A, 33, 45-60.
 - [20] ——— (1971b). The Exact Distribution of Wilk's Criterion. *Ann. Math. Statist.*, 42, 1010-1019.
 - [21] Mathai, A.M. e Saxena, R.K. (1978). *Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences*. Springer-Verlag, New York.
 - [22] Meijer, C.S. (1941). On the G-Function. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* 44, 1062-1070.
 - [23] ——— (1946). On the G-Function I a VIII. *Idem.* 49, 227-237, 344-356, 457-469, 632-641, 765-772, 936-943, 1063-1072, 1165-1175.
 - [24] Rathie, P.N. e Pederzoli, G. (1980). Distribution of Product and Quocient of Pareto Variables. *Metrika*, 27, 165-179.
 - [25] Rathie, P.N. e Rohrer, H.G. (1979). The Exact Distribution of Products of Independent Random Variables. *Multivariate Statistical Analysis and its Applications*. IMECC-UNICAMP. Cam